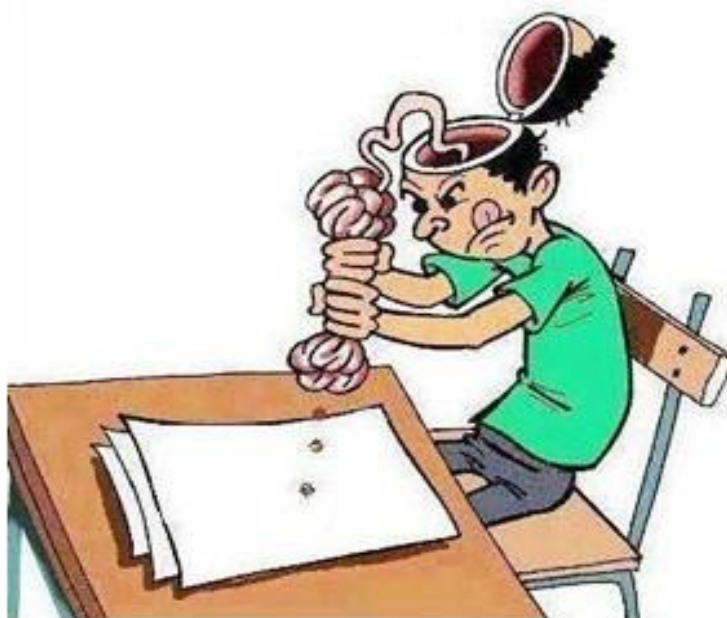


**Επαναληπτικά Διαγωνίσματα  
στα Μαθηματικά προσανατολισμού  
της Β΄ Λυκείου  
από το Askisopolis  
2023 - 2024**

**ΜΑΘΗΤΗΣ ΣΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ**



**Αντώνης Βαλέργας  
Στέλιος Μιχαήλογλου  
Θανάσης Νικολόπουλος  
Βαγγέλης Ραμαντάνης  
Βαγγέλης Τόλης  
Ισαάκ Χιονίδης**

**Αποστόλης Κακαβάς  
Άγγελος Μπλιάς  
Δημήτρης Πατσιμάς  
Νίκος Σαμπάνης  
Νίκος Τούντας**



**Ασκησόπολις**  
ο πιο πλούσιος κόσμος  
θεμάτων και ασκήσεων

# Μαθηματικά προσανατολισμού Β' Λυκείου

Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στην ευθεία (Κεφάλαιο 2)

2023-2024

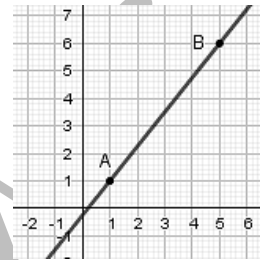
27-1-2024

## Θέμα Α

**A1.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις:

**α)** Στο διπλανό σχήμα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας  $AB$  είναι

- A.  $\frac{6}{5}$       B.  $\frac{5}{4}$       Γ.  $\frac{4}{5}$       Δ.  $\frac{2}{3}$       E.  $\frac{5}{6}$



**β)** Αν η ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$  έχει συντελεστή διεύθυνσης, τότε είναι:

- A.  $\Gamma = 0$       B.  $A \neq 0$       Γ.  $B \neq 0$       Δ.  $A = 0$

**γ)** Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που είναι παράλληλη με τον  $y'$  ισούται με

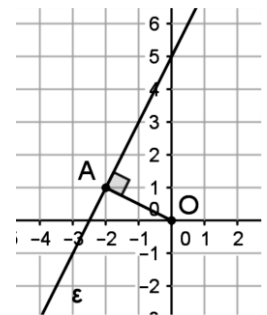
- A. 0      B. -1      Γ. 1      Δ.  $\epsilon\phi\frac{\pi}{4}$       E. δεν ορίζεται

**δ)** Μια ευθεία κάθετη στην  $\epsilon: y = x$  είναι η:

- A.  $y = x + 5y$       B.  $y = 2$       Γ.  $x + y = 8$       Δ.  $y = -2x$       E.  $x = 1$

**ε)** Η ευθεία  $\epsilon$  του διπλανού σχήματος έχει εξίσωση:

- A.  $y = 4x + 5$       B.  $y = 2x + 5$       Γ.  $y = 3x + 5$   
 Δ.  $y = 5x + 5$       E.  $y = -x + 5$



μονάδες 5x3

**A2.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η ευθεία  $y = -2x + 2024$  σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα  $x'x$ .

**β)** Οι ευθείες  $x = 3$  και  $y = 1$  είναι κάθετες.

**γ)** Ένα παράλληλο διάνυσμα στην ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$  είναι το  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .

**δ)** Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο  $M(x_0, y_0)$  έχουν εξίσωση:  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**ε)** Η ευθεία  $x = 2024$  έχει συντελεστή διεύθυνσης 0.

μονάδες 10

## Θέμα Β

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $A(-1, 2)$ ,  $B(3, -2)$  και  $\Gamma(1, 4)$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι το μέσο  $M$  της  $A\Gamma$  έχει συντεταγμένες  $(0, 3)$ .

μονάδες 3

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου  $BM$ .

μονάδες 5

**B3.** Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ΒΓ.

μονάδες 5

**B4.** Να αποδείξετε ότι το ύψος ΑΔ του τριγώνου έχει εξίσωση  $x - 3y + 7 = 0$ .

μονάδες 7

**B5.** Αν η ΒΜ έχει εξίσωση  $5x + 3y - 9 = 0$ , να βρείτε το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΜ.

μονάδες 5

### Θέμα Γ

Δίνονται το σημείο  $M(1, 1)$  και η ευθεία  $\epsilon_1: 3x + y - 6 = 0$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (η):  $2x + y + \lambda(3x + y - 6) = 0$  είναι εξίσωση ευθείας για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

μονάδες 6

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (η) διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρείτε.

μονάδες 7

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\epsilon_2$  που διέρχεται από το Μ και είναι παράλληλη στην  $\epsilon_1$ .

μονάδες 5

**Γ4.** Αν  $\epsilon_2: 3x + y - 4 = 0$  να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των  $\epsilon_1, \epsilon_2$ .

μονάδες 7

### Θέμα Δ

Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν δύο ευθείες με εξισώσεις:  $\epsilon_1: y = 6t$  και  $\epsilon_2: y = 2t + 8$ ,  $t \geq 0$ , που εκφράζουν τα συνολικά έσοδα και έξοδα μιας εταιρείας, αντίστοιχα.

**Δ1.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Σ και να σχολιάσετε τι εκφράζουν αυτές.

Μονάδες 6

**Δ2.** Όμοια για τα σημεία Μ, Α και Β.

Μονάδες 3

**Δ3.** Βρείτε την απόσταση ΑΒ και γράψτε τι εκφράζει.

Μονάδες 3

**Δ4.** Βρείτε την απόσταση ΣΑ.

Μονάδες 2

**Δ5.** Βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΜΟΣ και ΣΑΒ.

Μονάδες 4

**Δ6.** Βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία  $\epsilon_2$ .

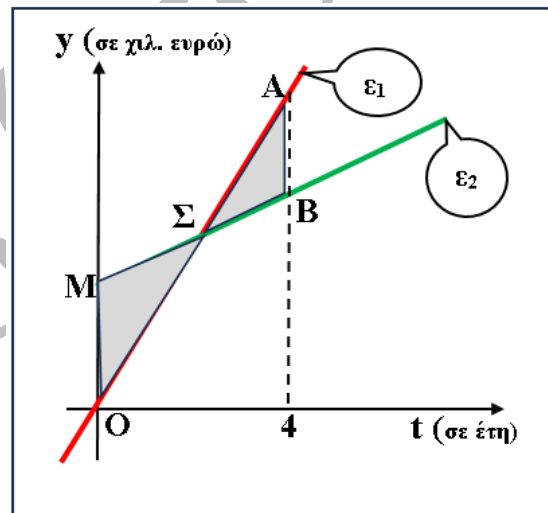
Μονάδες 2

**Δ7.** Για ποιες τιμές του  $t$  έχουμε ζημιά και για ποιες κέρδος της εταιρείας;

Μονάδες 3

**Δ8.** Για ποιες τιμές του  $\kappa > 0$  η ευθεία  $y = \kappa$  δεν έχει κοινά σημεία με τα τρίγωνα ΜΟΣ και ΣΑΒ;

Μονάδες 2



**Καλή τύχη!**

## Λύση

### Θέμα Α

A1. α) Β β) Γ γ) Ε δ) Γ ε) Β

A2. α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Λάθος

### Θέμα Β

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $A(-1,2)$ ,  $B(3,-2)$  και  $\Gamma(1,4)$ .

B1. Είναι  $x_M = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$ ,  $y_M = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ , άρα  $M(0,3)$ .

B2. Η ΒΜ έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{3+2}{0-3} = -\frac{5}{3}$  και εξίσωση

$$BM: y - 3 = -\frac{5}{3}(x - 0) \Leftrightarrow 3y - 9 = -5x \Leftrightarrow 5x + 3y - 9 = 0.$$

B3.  $\lambda_{BG} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{4+2}{1-3} = -3$ .

B4. Είναι  $AD \perp BG \Leftrightarrow \lambda_{AD} \lambda_{BG} = -1 \Leftrightarrow -3\lambda_{AD} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AD} = \frac{1}{3}$ .

Το ύψος ΑΔ έχει εξίσωση:  $y - 2 = \frac{1}{3}(x + 1) \Leftrightarrow 3y - 6 = x + 1 \Leftrightarrow x - 3y + 7 = 0$ .

B5. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ΑΔ, ΒΜ είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} x - 3y + 7 = 0 & (1) \\ 5x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ και από την (1) έχουμε}$$

$$\frac{1}{3} - 3y + 7 = 0 \Leftrightarrow -3y = -\frac{1}{3} - \frac{21}{3} \Leftrightarrow -3y = -\frac{22}{3} \Leftrightarrow y = \frac{22}{9}. \text{ Άρα το ζητούμενο σημείο έχει συντεταγμένες } \left(\frac{1}{3}, \frac{22}{9}\right).$$

### Θέμα Γ

Δίνονται το σημείο  $M(1,1)$  και η ευθεία  $\epsilon_1: 3x + y - 6 = 0$ .

Γ1. Είναι  $2x + y + \lambda(3x + y - 6) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3\lambda x + \lambda y - 6\lambda = 0 \Leftrightarrow (2 + 3\lambda)x + (1 + \lambda)y - 6\lambda = 0$  (1)

Η (1) δεν είναι εξίσωση ευθείας αν και μόνο αν  $\begin{cases} 2 + 3\lambda = 0 \\ 1 + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{3} \\ \lambda = -1 \end{cases}$  που είναι αδύνατο, άρα η εξίσωση

(η)

είναι εξίσωση ευθείας για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Γ2. 1<sup>ος</sup> τρόπος:

Για  $\lambda = -1$  η εξίσωση της (η) γίνεται:  $-x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

Για  $\lambda = -\frac{2}{3}$  η εξίσωση της (η) γίνεται:  $\left(1 - \frac{2}{3}\right)y + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}y = -4 \Leftrightarrow y = -12$

Δύο από τις ευθείες της (η) τέμνονται στο σημείο  $K(6, -12)$ . Όλες οι ευθείες της (η) διέρχονται από το  $K$ , αν και μόνο αν:  $2 \cdot 6 - 12 + \lambda(3 \cdot 6 - 12 - 6) = 0 \Leftrightarrow 12 - 12 + \lambda(18 - 18) = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 = 0$  ισχύει.

Άρα όλες οι ευθείες (η) διέρχονται από το σημείο  $K$ .

### 2<sup>ος</sup> τρόπος:

Για  $\lambda = 0$  η εξίσωση της (η) γίνεται  $2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$

Για  $\lambda = 1$  η εξίσωση της (η) γίνεται  $2x + y + (3x + y - 6) = 0 \Leftrightarrow 5x + 2y - 6 = 0$ .

Δύο από τις ευθείες της (η) έχουν εξισώσεις  $y = -2x$  και  $5x + 2y - 6 = 0$ .

$$\begin{cases} 5x + 2y - 6 = 0 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2(-2x) - 6 = 0 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4x - 6 = 0 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -12 \end{cases}$$

Δύο από τις ευθείες της (η) τέμνονται στο σημείο  $K(6, -12)$ . Όλες οι ευθείες της (η) διέρχονται από το  $K$ , αν και μόνο αν:  $2 \cdot 6 - 12 + \lambda(3 \cdot 6 - 12 - 6) = 0 \Leftrightarrow 12 - 12 + \lambda(18 - 18) = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 = 0$  ισχύει.

Άρα όλες οι ευθείες (η) διέρχονται από το σημείο  $K$ .

**3<sup>ος</sup> τρόπος:** (η):  $2x + y + \lambda(3x + y - 6) = 0$ . Έστω  $K(x_0, y_0)$  το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται

όλες οι ευθείες της (η). Τότε για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $2x_0 + y_0 + \lambda(3x_0 + y_0 - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 + y_0 - 6 = 0 \\ 2x_0 + y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3x_0 + y_0 - 6 = 0 \\ -2x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} (+) \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x_0 - 6 = 0 \\ 12 + y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6 \\ y_0 = -12 \end{cases}$$

**Γ3.** Η ευθεία  $\varepsilon_1$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_1 = \frac{-3}{1} = -3$ .

Επειδή η ευθεία  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλη στην  $\varepsilon_1$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_2 = \lambda_1 = -3$  και εξίσωση:

$$y - 1 = -3(x - 1) \Leftrightarrow 3x + y - 4 = 0.$$

**Γ4.** Ένα σημείο  $A(x, y)$  ανήκει στη μεσοπαράλληλη των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , αν και μόνο αν:

$$d(A, \varepsilon_1) = d(A, \varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|3x + y - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|3x + y - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \Leftrightarrow |3x + y - 6| = |3x + y - 4| \Leftrightarrow 3x + y - 6 = \pm(3x + y - 4) \Leftrightarrow$$

$$(3x + y - 6 = 3x + y - 4 \Leftrightarrow -6 = -4 \text{ αδύνατη}) \text{ ή}$$

$$(3x + y - 6 = -3x - y + 4 \Leftrightarrow 6x + 2y - 10 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 5 = 0).$$

Άρα η μεσοπαράλληλη των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  έχει εξίσωση  $3x + y - 5 = 0$ .

## Θέμα Δ

**Δ1.** Η λύση του συστήματος  $\begin{cases} y = 6t \\ y = 2t + 8 \end{cases}$  θα μας δώσει τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους  $\Sigma$ :

$$\begin{cases} y = 6t \\ y = 2t + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t = 2t + 8 \\ y = 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t - 2t = 8 \\ y = 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t = 8 \\ y = 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ y = 6 \cdot 2 = 12 \end{cases} \text{ Άρα } \Sigma(2, 12).$$

Δηλαδή, τα έσοδα και τα έξοδα της εταιρείας σε δύο χρόνια θα γίνουν ίσα, με τιμή 12.000 €.

**Δ2.** Στην  $\varepsilon_2$  για  $t = 0$ :  $y = 2 \cdot 0 + 8 = 0 + 8 = 8$ , άρα  $M(0, 8)$ .

Στην  $\varepsilon_2$  για  $t = 4$ :  $y = 2 \cdot 4 + 8 = 8 + 8 = 16$ , άρα  $B(4, 16)$ .

Στην  $\varepsilon_1$  για  $t = 4$ :  $y = 6 \cdot 4 = 24$ , άρα  $A(4, 24)$ .

Οι συντεταγμένες του σημείου  $M$  εκφράζουν τα έξοδα της εταιρείας στο ξεκίνημα της λειτουργίας της, τα οποία είναι 8.000€.

Οι συντεταγμένες του σημείου Α μας δίνουν τα έσοδα της εταιρείας μετά από 4 έτη, τα οποία είναι 24.000€, ενώ οι συντεταγμένες του σημείου Β μας δίνουν τα έξοδα της μετά από 4 έτη, τα οποία είναι 16.000€.

**Δ3.** Είναι  $d(A, B) = \sqrt{(4-4)^2 + (24-16)^2} = \sqrt{8^2} = 8$  ή  $d(A, B) = |y_2 - y_1| = |24 - 16| = 8$ , δηλαδή σε τέσσερα έτη τα κέρδη (έσοδα-έξοδα) θα είναι 8.000€.

**Δ4.** Είναι  $d(A, \Sigma) = \sqrt{(4-2)^2 + (24-12)^2} = \sqrt{4+144} = \sqrt{148} = \sqrt{4 \cdot 37} = 2 \cdot \sqrt{37}$

**Δ5.** Για το εμβαδόν του τριγώνου ΜΟΣ έχουμε:

$$\vec{SO} = (0, 0) - (2, 12) = (0 - 2, 0 - 12) = (-2, -12) \text{ και}$$

$$\vec{SM} = (0, 8) - (2, 12) = (0 - 2, 8 - 12) = (-2, -4), \text{ οπότε:}$$

$$(\Sigma OM) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{SM}, \vec{SO}) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -12 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |24 - 8| = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ τ.μ.}$$

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΣΑΒ, επίσης:

$$\vec{SA} = (4, 24) - (2, 12) = (4 - 2, 24 - 12) = (2, 12) \text{ και}$$

$$\vec{SB} = (4, 16) - (2, 12) = (4 - 2, 16 - 12) = (2, 4), \text{ οπότε:}$$

$$(\Sigma AB) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{SA}, \vec{SB}) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |24 - 8| = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ τ.μ.}$$

**2ος τρόπος**

$$(\Sigma OM) = \frac{1}{2} (OM) \cdot d(\Sigma, Oy) = \frac{1}{2} |y_M| |x_\Sigma| = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8.$$

Είναι  $(\varepsilon_1): 6t - y = 0$  και  $d(B, \varepsilon_1) = \frac{|6 \cdot 4 - 16|}{\sqrt{37}} = \frac{8}{\sqrt{37}}$  οπότε

$$(\Sigma AB) = \frac{1}{2} (A\Sigma) \cdot d(B, \varepsilon_1) = \frac{1}{2} d(A, \Sigma) \cdot d(B, \varepsilon_1) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{37} \cdot \frac{8}{\sqrt{37}} = 8.$$

**Δ6.**  $\varepsilon_2: y = 2t + 8 \Leftrightarrow 2t - y + 8 = 0$ . Έτσι:

$$d(A, \varepsilon_2) = \frac{|2 \cdot 4 - 24 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|8 - 24 + 8|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

**Δ7.** Ζημιά έχουμε στο διάστημα που η ευθεία των εσόδων είναι «κάτω» από την ευθεία των εξόδων, δηλαδή για  $t \in [0, 2)$ , ενώ κέρδος στο διάστημα που η ευθεία  $(\varepsilon_1)$  είναι «πάνω» από την ευθεία  $(\varepsilon_2)$ , δηλαδή για  $t \in (2, +\infty)$ .

**Δ8.** Η ευθεία με εξίσωση  $y = \kappa$  είναι παράλληλη στον άξονα των  $t$  και διέρχεται από το σημείο  $(0, \kappa)$ .

Η κορυφή  $A(4, 24)$  έχει την μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα  $x'x$  απ' όλα τα σημεία (και τα εσωτερικά τους) των δύο τριγώνων, οπότε για  $\kappa > 24$  η ευθεία  $y = \kappa$  δεν έχει κοινά σημεία με τα τρίγωνα ΟΜΣ και ΣΑΒ.